

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961 - 002

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. G.W. Veltkamp

22 februari 1961

Eigenwaarden



1961

$$\det\{A_{ij} - \lambda\delta_{ij}\} = 0. \quad (2)$$

Heeft deze vergelijking n verschillende wortels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dan zijn er ook n eigenvectoren $x_1, \dots, x_n$ (niet te verwarren met componenten) die onafhankelijk zijn (d.w.z. $\sum \alpha_j x_j = 0$ impliceert $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$) en R_n opspannen, d.w.z. bij iedere $y \in R_n$ zijn er getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zodat

$$y = \sum \alpha_j x_j.$$

Hieruit volgt direct

$$Ay = \sum \lambda_j \alpha_j x_j,$$

zodat A een bijzonder eenvoudige gedaante heeft indien we $x_1, \dots, x_n$ als basis voor R_n kiezen.

Heeft A samenvallende wortels dan kan de zaak gecompliceerder worden, er zijn dan soms minder dan n onafhankelijke eigenvectoren. Dit laatste doet zich echter niet voor indien A symmetrisch ($A_{ij} = \bar{A}_{ji}$) is. Bovendien zijn dan alle eigenwaarden reeel en kunnen de eigenvectoren onderling orthogonaal gekozen worden.

2. We generaliseren het geval van symmetrische matrices voor oneindig dimensionale ruimten.

Zij R een (complexe) lineaire ruimte met inproduct.

Dat is een verzameling van elementen $x, y, \dots$ zodanig dat

A. Aan ieder tweetal elementen is een derde, $z = x + y$, toegevoegd. Aan ieder element x en ieder complex getal λ is een element λx toegevoegd. De optelling is commutatief en associatief ($x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y) + z$), de vermenigvuldiging is associatief ($\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$) en distributief ($\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$). Bovendien volgt uit $x + z = y + z$ dat $x = y$.

Uit dit laatste volgt dat er één element 0 in R is waarvoor geldt dat $x + (-1)x = 0$, $0x = 0$. Voorts dat de aftrekking mogelijk is, etc.

B. Aan ieder tweetal elementen x en y is een complex getal (het inproduct) (x, y) toegevoegd zodanig dat

$$\begin{aligned} (x + y, z) &= (x, z) + (y, z) \\ (\alpha x, y) &= \alpha (x, y) \\ (y, x) &= \overline{(x, y)} \\ (x, x) &> 0 \text{ als } x \neq 0. \end{aligned}$$

We definiëren de norm $|x|$ van x door

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Er geldt : $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ (Schwarz)

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (Minkowski).

We zeggen : $\lim x_n = x$ indien $\lim |x_n - x| = 0$. Hieruit volgt dat $\{x_n\}$ een fundamenteaalrij is : $|x_n - x_m| < \varepsilon$ voor n en $m > N(\varepsilon)$. R heet volledig (Hilbertruimte) indien omgekeerd iedere fundamenteaalrij een limiet heeft. Dit veronderstellen we niet.

Voorbeelden

1. n -dimensionale complexe cartesische ruimte R_n .

Elementen $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. Optelling en vermenigvuldiging coördinaatsgewijs. Inproduct : $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$.

2. Ruimte ℓ^2 . Elementen $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, zo dat $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$. Optelling vermenigvuldiging coördinaatsgewijs. Inproduct : $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$.

3. Ruimte C van continue functies op eindig interval. Elementen $x =$ continue functie van t voor $a \leq t \leq b$. Optellen en vermenigvuldigen gewoon. Inproduct $(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$.

Een lineaire afbeelding A van R in R voegt aan ieder element x van R eenduidig een element Ax toe zodanig dat $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

A heet symmetrisch indien voor alle x en $y \in R$

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

A heet compact indien bij iedere begrensde rij $\{x_n\}$ (dus $|x_n| < M$, alle n) de rij Ax_n een convergente deelrij heeft (dus er is een $y \in R$ en een rij indices $n_1, n_2, \dots$, zodanig dat $\lim_{j \rightarrow \infty} Ax_{n_j} = y$).

Voorbeelden van compacte symmetrische afbeeldingen

1. In R_n : afbeeldingen voortgebracht door symmetrische matrices
2. In l_2 : afbeeldingen voortgebracht door symmetrische oneindige matrices $\{A_{ij}\}$ zodanig dat $\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 < \infty$
3. In C : afbeeldingen voortgebracht door een continue integraalterm :
zij K continue functie van t en s voor $a \leq t, s \leq b$ en rij $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$. Zij voor $x \in C$ Ax gedefinieerd door

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s) x(s) ds$$

3. Lemma. Is A compact dan is

$$|A| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|x|=1} |Ax|$$

een eindig getal. Is A bovendien symmetrisch dan is

$$\sup_{|x|=1} |(Ax, x)| = |A|$$

en minstens of $|A|$ of $-|A|$ is eigenwaarde van A .

Stelling. Is A compact en symmetrisch en $|A| \neq 0$ dan zijn er eindig of aftelbaar oneindig veel van nul verschillende reële getallen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ en elementen $x_1, x_2, \dots$ van R zodanig dat

- a) $|A| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$
- b) als de rij $\{\lambda_j\}$ oneindig is dan is $\lim \lambda_j = 0$
- c) $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$
- d) $Ax_j = \lambda_j x_j$
- e) voor iedere $x \in R$ geldt $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, x_j) x_j = Ax$ (1)
- f) is $\lambda \neq \lambda_j$ ($j = 1, \dots, n$) dan heeft de vergelijking

$$Ax - \lambda x = y$$

voor iedere $y \in R$ een eenduidige oplossing, is $\lambda = \lambda_j$ dan heeft deze vergelijking dan en slechts dan een (niet eenduidige) oplossing indien $(y, z) = 0$ voor alle z die voldoen aan $Az = \lambda_j z$.

Opmerkingen

1. De eigenschap (1) is in zekere zin ook karakteristiek voor compacte symmetrische afbeeldingen. Zij $\{x_j\}$ een orthonormaalrij en $\{\lambda_j\}$ een rij reële getallen met $\lim \lambda_j = 0$. En zij voor alle $x \in R$ de reeks

$$Bx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, x_j) x_j$$

convergent. Dan is B een compacte symmetrische afbeelding.

2. Is de ruimte R volledig dan convergeert voor iedere $x \in R$ de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j) x_j$ naar een $y \in R$ en er geldt $A(x - y) = 0$.

3. In het geval van een afbeelding in C, voortgebracht door een continue symmetrische integraalkern, convergeert de reeks

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j(t) \int_a^b x(s) \overline{x_j(s)} dx$$

zelfs uniform (naar $\int_a^b K(t, s) x(s) ds$).